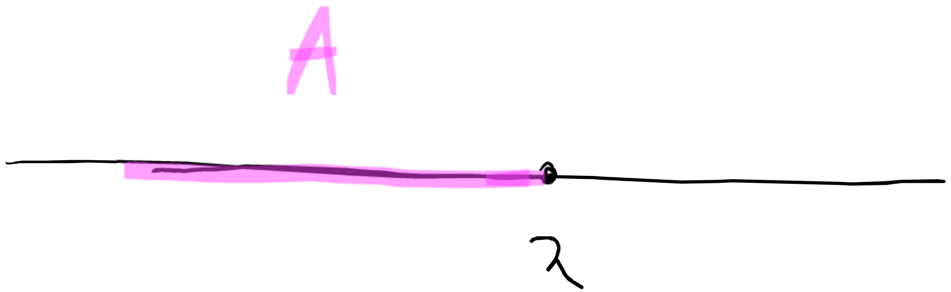
بنام خدا

$$F_X(x) = P_r\{X \le x\}$$

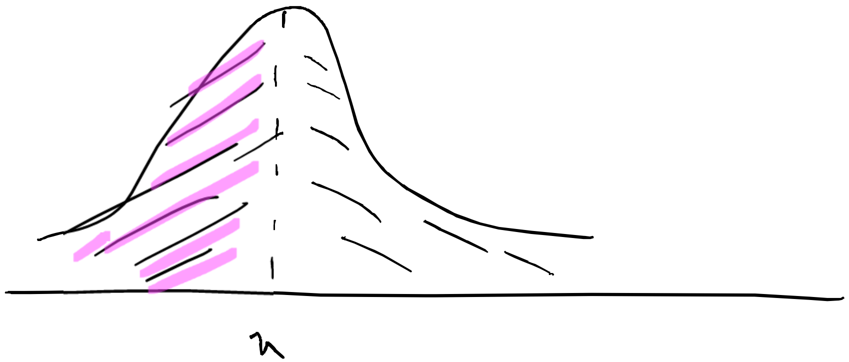
$$P_r\{x_1 < X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$



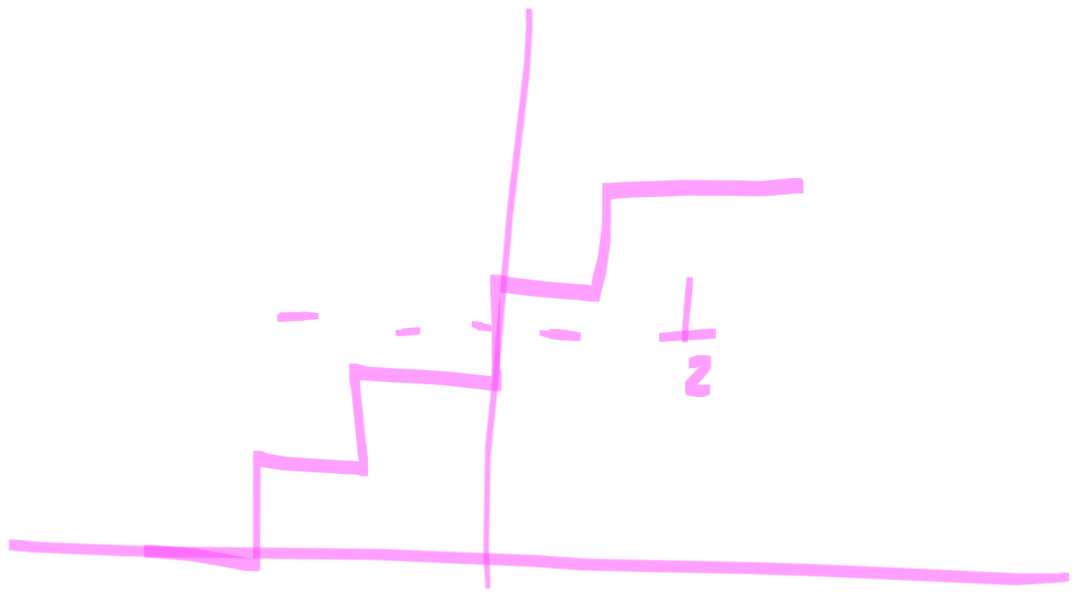
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$P_r\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\, dx$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2}$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}$$ median


2

مثال‌های از متغیرهای تصادفی

الف) حالت پیوسته

متغیرهای تصادفی یکنواخت

متغیرهای گوسی

متغیرهای نمایی exponential

$$X \sim \exp(\lambda)$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

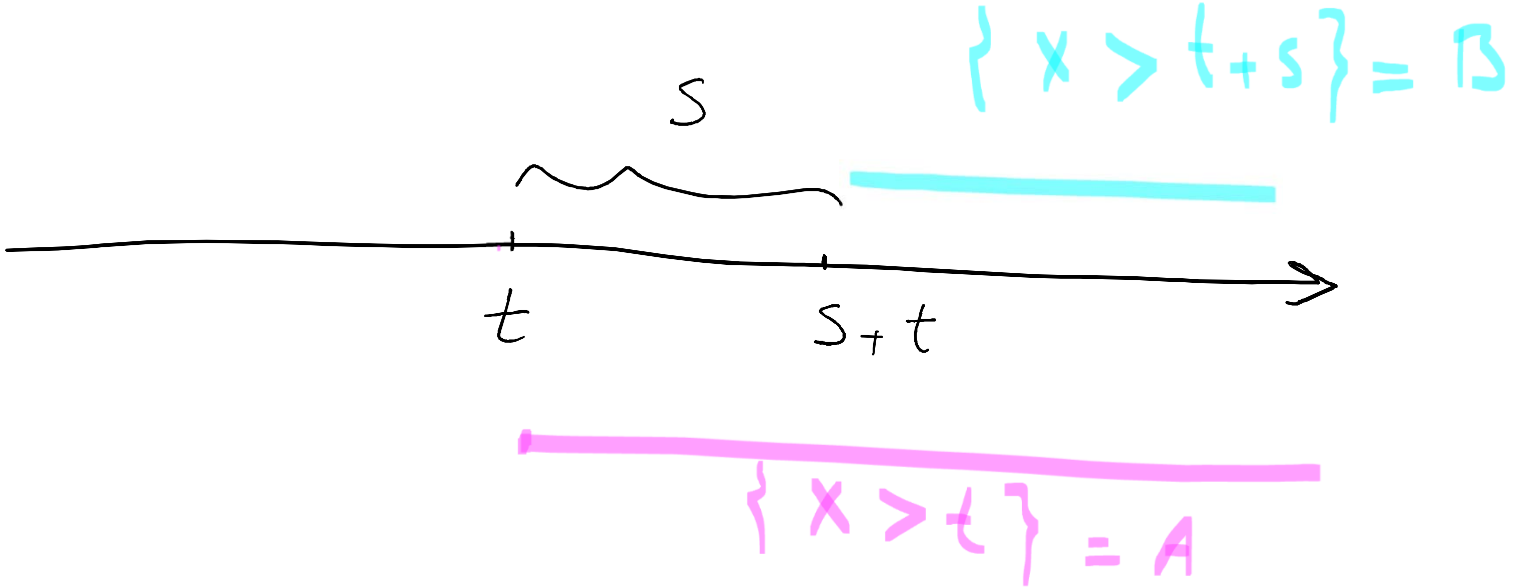
$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$$

یکی از خصوصیات متغیرهای تصادفی نمایی بی‌حافظه بودن آنهاست.

متغیر تصادفی X را بدون حافظه می‌گوییم، اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall\, t, s > 0, \quad P\{X > t+s \mid X > t\} = P\{X > s\}$$

برای متغیر تصادفی نمایی



$$P_r\{B|A\} = P_r\{x > t+s \mid x > t\} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

$$\Longrightarrow P_r\{X > t+s \mid X > t\} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P_r\{X > t+s\}}{P_r\{X > t\}}$$

$$F_X(x) = P_r\{X < x\} = (1 - e^{-\lambda x})\,u(x)$$

$$P_r\{X > x\} = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0 \qquad 1$$

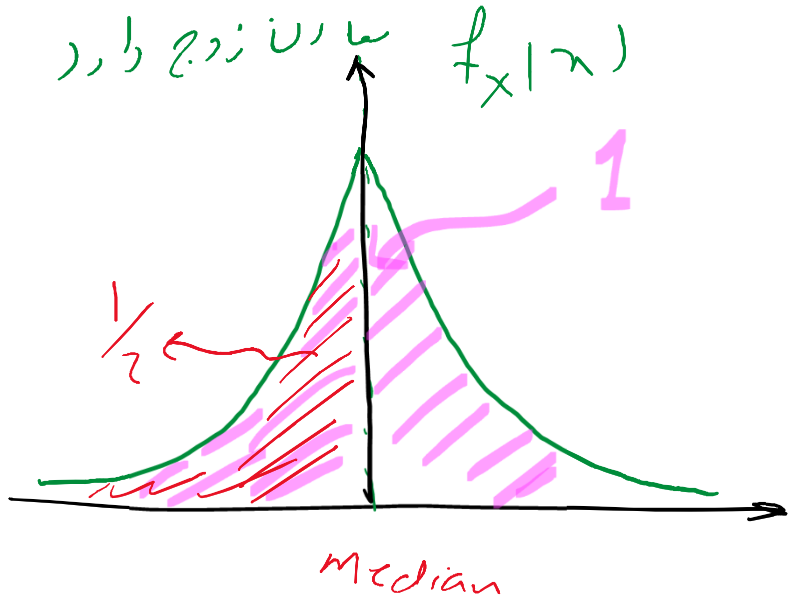
$$\Longrightarrow P_r\{X > t+s \mid X > t\} \overset{1}{=} \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \overset{1}{=} P_r\{X > s\}$$

* متغیر تصادفی لاپلاسین یا توزیع لاپلاس

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی لاپلاسین می‌گوییم اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

$$X \sim laplacian(\lambda)$$



از این متغیر تصادفی برای مدل سازی نرخ از نوترون‌ها در سیستم‌های الکترونیکی استفاده می‌شود.

* توزیع گاما

یک متغیر تصادفی X را دارای توزیع گاما می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad , \quad X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$$

برای $x \geq 0$ تعریف شده است.

که در آن

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} \, dy$$

یکی از ویژگی های تابع $\Gamma(r)$ به صورت زیر است،

$$\Gamma(r) = (r-1)\underbrace{\Gamma(r-1)}_{(r-2)\underbrace{\Gamma(r-2)}_{(r-3)\Gamma(r-3)}}$$

اگر $r \in \mathbb{N}$ (یا اعداد صحیح مثبت)

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad u(x)$$

$$X \sim Gamma(r, \lambda)$$

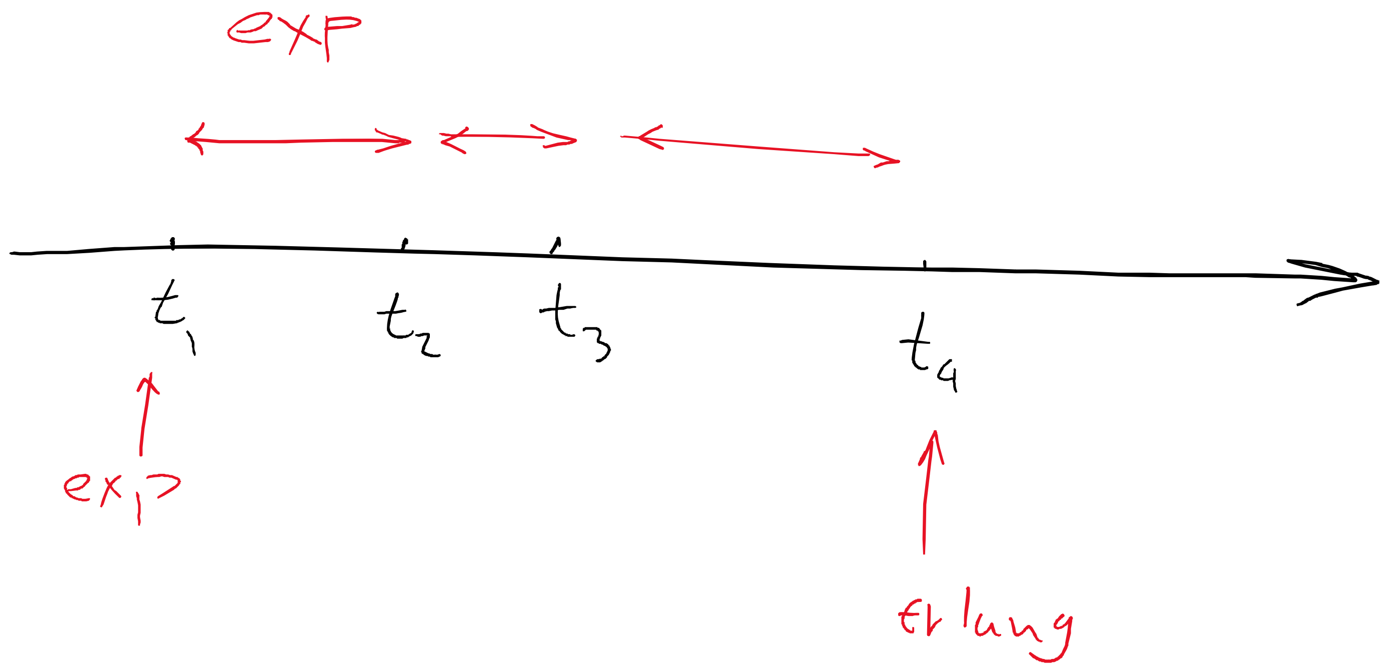
اگر r یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، توزیع گاما را در این حالت توزیع ارلانگ می‌نامیم.

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \qquad x \geq 0$$

$X \sim Erlang(n, \lambda)$

متغیر تصادفی ارلانگ $Erlang(n, \lambda)$ برای مدل سازی زمان انتظار برای n امین رخداد پیش آمد مورد نظر استفاده می شود

* متغیر تصادفی ارلانگ $Erlang(n, \lambda)$ به ازای $n = 1$ معادل توزیع نمایی است، یعنی توزیع نمایی برای مدل سازی زمان انتظار برای اولین رخداد پیش آمد مورد نظر قابل استفاده است.


exp
t_1
t_2
t_3
t_4
exp
erlang

حاصلجمع n متغیر تصادفی نمایی (اکیداً مستقل) با پارامتر λ، یک متغیر تصادفی $Erlang(n, \lambda)$ را تشکیل می‌دهند. با بیان ریاضی

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n , \quad X_i \sim exp(\lambda) , \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

$$\Longrightarrow \quad Y \sim Erlang(n, \lambda)$$

* توزیع $\chi^2(n)$ (توزیع χ^2 با n درجه آزادی)

χ-square (chi-square)

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی با توزیع $\chi^2(n)$ می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u(x)$$

برای $n \geq 1$ تعریف می‌شود.

* نکته مهمی که در مورد متغیر تصادفی $\chi^2(n)$ وجود دارد، این است که حاصل جمع توان دوم n متغیر تصادفی نرمال استاندارد، یک متغیر تصادفی $\chi^2(n)$

(تماما مستقل)

است. با بیان ریاضی

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad , \quad X_i \sim N(0,1) \ , \ X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

$$\Longrightarrow \quad Y \sim \chi^2(n)$$

* متغیر تصادفی β

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی با توزیع بتا می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$$\boxed{X \sim Beta(a,b)}$$

که در آن تابع $\beta(a,b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

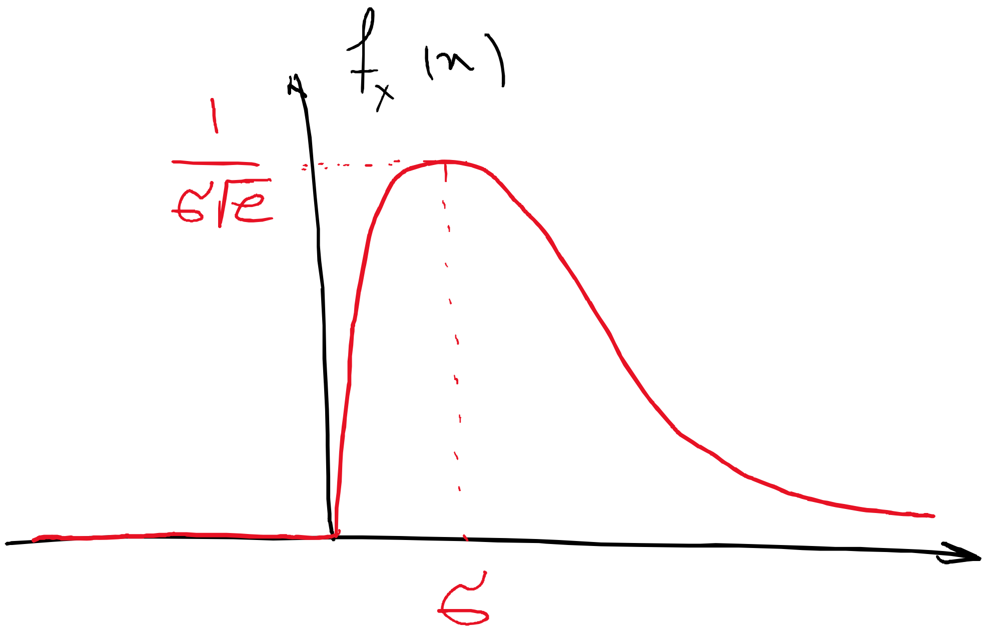
توزیع رایلی Rayleigh

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی رایلی می‌گوییم، اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad u(x)$$

برای $x \geq 0$ تعریف می‌شود.

متغیر تصادفی رایلی یکی از پرکاربردترین متغیرهای تصادفی در مدل سازی کانال های فیدینگ در سیستم های مخابراتی است.



$$X \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

ویژگی دیگر متغیر تصادفی رایلی، این است که پوش یک متغیر تصادفی گوسی مختلط را در متغیر تصادفی توأماً گوسی را به صورت یک متغیر تصادفی رایلی قابل مدل سازی است.

$$Y = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad X, Y \text{ توأماً نرمال } (0, \sigma^2) \implies Y \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

$X + jY$: متغیر تصادفی گوسی مختلط

یا اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی نرمال $N(0,\sigma^2)$ و مستقل از هم باشند

آنگاه $X_1 , X_2 \sim N(0,\sigma^2)$ ، $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ ، $Y=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$

$$\Longrightarrow \quad Y \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$$

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی رایلی با $\sigma^2=1$ باشد، احتمال اینکه اندازه‌ی این متغیر تصادفی بین $1/2$ تا $5/6$ باشد را بدست بیاورید.

$X \sim \text{Rayleigh}(1)$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad u(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} u(x)$$

$$P_r\left\{\frac{1}{2} \leq |X| \leq \frac{5}{6}\right\} = P_r\left\{\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{6}\right\}$$

$$= \int_{1/2}^{5/6} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{1/2}^{5/6}$$

$$= e^{-1/8} - e^{-\frac{25}{72}}$$

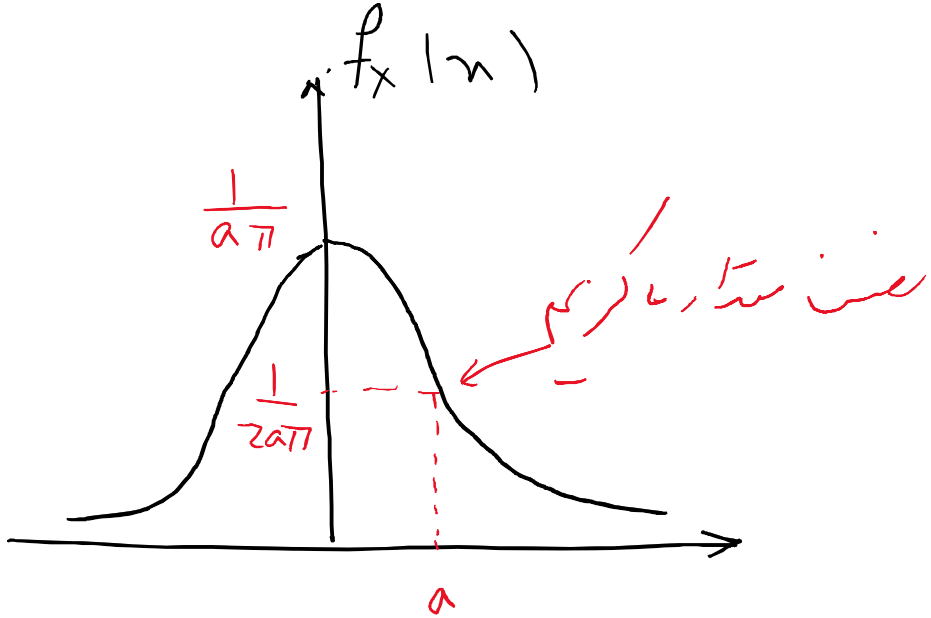
متغیر تصادفی Cauchy (توزیع کوشی)

متغیر تصادفی کوشی، متغیری است که تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر است.

$$f_X(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2}$$

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

دارای تقارن زوج



(توزیع کوشی نیز مانند توزیع گوسی خاصیت پایداری دارد)

ب) حالت گسسته

در این بخش می‌خواهیم چند متغیر تصادفی پرکاربرد گسسته را معرفی کنیم.
همان‌طور که می‌دانیم، متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی گسسته می‌گوییم اگر مقادیر
از یک مجموعه شمارش‌پذیر را اختیار کند. در ارتباط با این متغیرهای تصادفی، تابع
جرم احتمال pmf را می‌شناسیم که با داشتن آن، تابع توزیع و هرگونه احتمال
متغیر تصادفی گسسته را می‌توان به دست آورد.

٭ متغیر تصادفی برنولی — Bernoulli

متغیر تصادفی برنولی X در ارتباط با آزمایش‌های تعریف می‌شوند که دو نتیجه ممکن دارند. به طور مثال در آزمایش پرتاب سکه، اگر احتمال آمدن شیر برابر p باشد، متغیر تصادفی برنولی که نشان‌دهنده رخداد شیر در این آزمایش تصادفی است به صورت زیر بیان می‌شود

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر } H \text{ رخ دهد} \quad (\text{با احتمال } p) \\ 0 & \text{اگر } T \text{ رخ دهد} \quad (\text{با احتمال } 1-p) \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

$$P_r\{X=1\} = P, \qquad P_r\{X=0\} = 1-P$$

$$X = \begin{cases} 1 & P \\ 0 & 1-P \end{cases}$$

به طور کلی اگر یک آزمایش تصادفی رخداد یک پیش آمد با احتمال p مدنظر باشد می توانیم این آزمایش را با متغیر تصادفی برنولی مدل سازی کنیم. در واقع تمام حالت هایی که پیش آمد مورد نظر رخ نمی دهد را به عنوان یک نتیجه از آزمایش و حالتی که پیش آمد مورد نظر رخ دهد را به عنوان نتیجه دیگر در نظر می گیریم.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر پیش آمد مورد نظر رخ دهد} \quad (\text{با احتمال } p) \\ 0 & \text{اگر پیش آمد مورد نظر رخ ندهد (در غیر این صورت)} \quad (\text{با احتمال } 1-p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 & \text{با احتمال } 1-p \end{cases} \quad \longrightarrow \quad X \sim \text{Bernolli}(p)$$

به عنوان مثال: اگر در آزمایش پرتاب تاس، پیش آمد مورد نظر این باشد که عدد ظاهر شده کمتر یا مساوی 2 باشد، آنگاه متغیر تصادفی برنولی که برای مدل سازی فضای این پیش آمد استفاده می شود، به صورت زیر است:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر عدد ظاهر شده کمتر یا مساوی 2} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \ \text{با احتمال} \\ 0 & \text{oth.} \quad 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \ \text{با احتمال} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{cases} 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{cases}$$

$$X \sim \text{Bernolli}(1/3)$$

* متغیر تصادفی هندسی   Geometric

متغیر تصادفی هندسی X، متغیری است که نشان دهنده تعداد آزمایش های لازم برای اولین رخداد پیش آمد مورد نظر است.

$X = i$ = نشان دهنده تعداد آزمایش های لازم برای اولین بار پیش آمد مورد نظر

(احتمال پیش آمد مورد نظر = P)

$P_r\{X = i\} = ?$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

در مورد متغیرهای تصادفی گسسته اگر تابع pmf را بدست بیاوریم ، متغیر تصادفی

را بصورت کامل آماری می شناسیم .

$$\Pr\{X = i\} = \Pr\{\text{در آزمایش } i\text{ام برای اولین بار پیشامد مورد نظر رخ بدهد}\}$$

$$= \Pr\{\text{در } i-1 \text{ آزمایش اول پیشامد مورد نظر رخ ندهد و در آزمایش } i\text{ام رخ بدهد}\}$$

$$= \overbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}^{i-1 \text{ بار رخ ندهد}}\; p$$

آزمایش آخر (iام) رخ بدهد

(در ارتباط با تکرار مستقل آزمایش‌های تصادفی)

$$\Rightarrow \Pr\{X=i\} = (1-p)^{i-1}\,p \qquad \equiv \text{pmf}$$

متغیر تصادفی هندسی

$$i \in \{1, 2, \dots\}$$

$$X \sim \text{Geometric}(p)$$